



GOBIERNO DEL ESTADO DE
VERACRUZ
2024 - 2030

SEV
SECRETARÍA
DE EDUCACIÓN
DE VERACRUZ

SEMSys
SUBSECRETARÍA DE
EDUCACIÓN MEDIA
SUPERIOR Y SUPERIOR

TEBAEV
Telebachillerato de Veracruz

Dirección General de Telebachillerato

Temas selectos de matemáticas II

Constantino Allende García
Jennifer Alexis Jiménez Valiente

GOBIERNO DEL ESTADO DE VERACRUZ

Norma Rocío Nahle García
Gobernadora del Estado de Veracruz

Claudia Tello Espinosa
Secretaria de Educación de Veracruz

David Agustín Jiménez Rojas
Subsecretario de Educación Media Superior y Superior

Dirección General de Telebachillerato

Director General
Irving Ilhuicamina Mendoza Ruiz

Subdirectora Técnica
Piedad Alcira Hernández Pérez

Jefe del Departamento Técnico Pedagógico
Noel Abraham Velázquez Viveros

Jefa de la Oficina de Planeación Educativa
Ana Flora Angulo Morales

Equipo editorial

Coordinación editorial
Mauro Morales Arellano

Asesoría académica
Gonzalo Jácome Cortés

Asesoría pedagógica
Jessica Martínez Barreto

Corrección y estilo
Bertha Isabel Álvarez Vera

Diseño editorial
Greisy del Carmen Ramos de la Cruz

Formación
Zaira Zulema Sánchez Hernández

Fotografía de la portada
Zaida Ruth García Montes

Temas selectos de matemáticas II

Primera edición: 2026
ISBN: 978-607-725-580-2

D. R. © 2026. Secretaría de Educación de Veracruz
Km 4.5 Carretera federal Xalapa-Veracruz
Col. Rubi Animas, C.P. 91193, Xalapa, Veracruz
Telebachillerato de Veracruz

Impreso en México

Módulo 1

Comportamientos fractales

Progresiones

1. Examina una problemática en la que se necesita aplicar la composición de funciones de variable real, particularmente la composición de una función consigo misma, con lo cual explora la definición de sistemas dinámico discreto y algunos ejemplos sencillos que remitan a la recurrencia y la autosimilitud, posteriormente observa propiedades y algunos resultados históricamente importantes que han dado solución a problemas o situaciones reales como lo son el Atractor de Lorenz o el estudio del Caos.
2. Revisa los conceptos de sucesión y serie, examinando algunos ejemplos (sucesiones aritméticas, geométricas, Fibonacci, serie aritmética y geométrica) con los cuales puede observar los conceptos de límite y convergencia e identifica estructuras en su entorno que poseen patrones, comportamientos repetitivos o fractales. Apoyándose de herramientas tecnológicas disponibles.

Metas de aprendizaje

1. C1M1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.
2. C1M2 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.
3. C2M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
4. C2M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.
5. C2M3 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.
6. C4M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

Categorías y subcategorías

C1. Procedural

- S1. Elementos aritmético-algebraicos
- S2. Elementos geométricos

C2. Procesos de intuición y razonamiento

- S1. Capacidad para observar y conjeturar
- S2. Pensamiento intuitivo
- S3. Pensamiento formal

C4. Interacción y lenguaje matemático

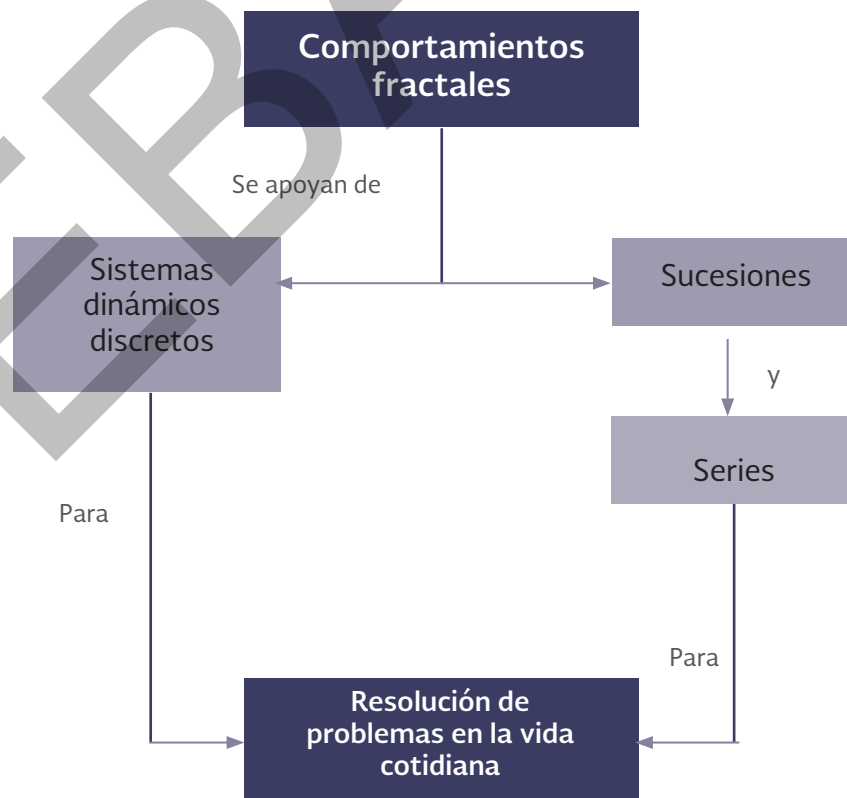
- S1. Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
- S2. Negociación de significados
- S3. Ambiente matemático de comunicación

Introducción

Durante tu formación, has tenido la oportunidad de conocer las diversas formas de expresar algún fenómeno que se presente en tu entorno, y así, a través de las matemáticas, puedes modelar una función que describa tal comportamiento. Has aprendido a identificar fenómenos físicos, químicos y/o económicos; con la intención de estudiar, analizar y predecir una gran variedad de situaciones en tu vida diaria.

En este primer módulo, nos enfocaremos en el estudio de la Teoría de los sistemas dinámicos discretos que nos ayudan a modelar fenómenos que cambian en saltos o intervalos discretos, como el crecimiento poblacional, economía o propagación de información; así también en la construcción de fractales y cálculos numéricos. Además, estudiaremos los conceptos de series y sucesiones que te ayudarán a identificar estructuras en tu entorno que posean patrones o comportamientos repetitivos o fractales.

Esquema 1.1
Mapa conceptual del módulo1.



Nota. Elaboración propia.

Exploro mis saberes

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es una función?
2. ¿Qué entiendes por sistema dinámico?
3. ¿Qué es una sucesión aritmética?
4. ¿Qué es una serie aritmética?
5. Resuelve el siguiente ejercicio:
Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 3$, encuentra la función compuesta $(f \circ g)(x)$.

Construye tu proyecto transversal

Realiza las actividades que se te piden a continuación.

Hoy en día el cambio climático se caracteriza por temperaturas globales en aumento y eventos climáticos extremos, incluyendo récords de calor, olas de calor severas y una primavera en México más calurosa de lo habitual. La Organización Meteorológica Mundial (OMM) prevé un 70% de probabilidad de que el calentamiento promedio supere los 1.5°C con respecto a la era preindustrial entre 2025 y 2029. Las medidas de adaptación ante el cambio climático en México incluyen la gestión de recursos hídricos y ecosistemas, la promoción de la eficiencia energética y las energías renovables, la planificación urbana orientada al transporte sostenible y la adopción de prácticas agrícolas resilientes. También se fortalecen la gobernanza climática, la participación social y el enfoque de derechos humanos, con programas estatales que establecen bases para mitigar y adaptarse a los efectos del cambio climático.

Es por ello, que buscamos crear Proyectos Escolares Comunitarios (PEC) a través de la estrategia Programa Aula, Escuela y Comunidad (PAEC) que satisfagan y cumplan con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) planteados en acuerdos internacionales.

En los Telebachilleratos “Paso del Correo” y “La Guásima” llevan como PEC huertos escolares, sin embargo, surge la necesidad de que los estudiantes puedan adoptar estas prácticas en sus hogares y/o espacios donde no cuenten con terreno. Con la finalidad de cumplir con los ODS, implementan un huerto hidropónico.

En esta Unidad de Aprendizaje Curricular modelarás matemáticamente, diseñarás y construirás un sistema de cultivo hidropónico funcional escolar con materiales reciclados (PET O PVC), para comprender los principios científicos, ecológicos y sociales del cultivo sustentable, vinculando las matemáticas, las ciencias naturales y la sostenibilidad alimentaria. Así también, aplicarás ecuaciones diferenciales, métodos numéricos y modelos iterativos para analizar el crecimiento de plantas y su interacción con el entorno.

Podrás analizar patrones y formas geométricas del crecimiento en hojas, raíces y tallos de plantas hidropónicas mediante geometría fractal y proporciones naturales (razón áurea, simetrías).

Figura 1.1
PEC Huertos escolares.



Nota. Adaptado de Facebook Tebaev Paso del Correo [Fotografía], 2024 (<https://www.facebook.com/photo/?fbid=1041877614610353&set=pb.100063643727783.-2207520000>). Obra de Dominio Público.

Construye tu proyecto transversal

Tabla 1.1 Cultivos recomendados (por región de Veracruz).

Región	Clima predominante	Cultivos hidropónicos viables	Características
Norte (Papantla, Poza Rica)	Cálido-húmedo	Lechuga, albahaca, espinaca	Requieren sombra parcial, rápido crecimiento.
Centro (Xalapa, Córdoba)	Templado-húmedo	Fresa, acelga, jitomate cherry	Buen rendimiento con control de humedad.
Sur (Coatzacoalcos, Minatitlán)	Cálido-tropical	Cilantro, pepino, chile	Alta producción en sistemas NFT (Técnica de película nutritiva) o DWC (Cultivo en aguas profundas).

Nota. Elaboración propia.

Figura 1.2
Hidroponía.



Nota. Elaboración propia por IA de Canva.

Fase 1

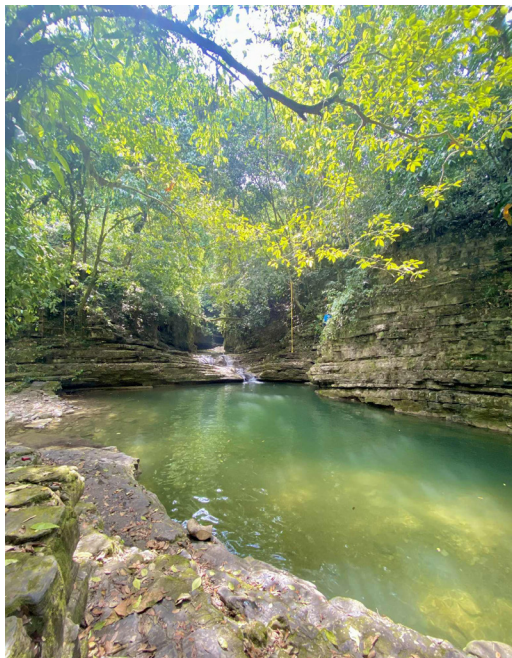
- I. Realizarás de forma individual, un trabajo de investigación que responda a los siguientes planteamientos:
 1. ¿Qué es la hidroponía y cómo funciona?
 2. Tipos de sistemas hidropónicos (NFT, raíz flotante, goteo).
 3. ¿Qué plantas crecen mejor en sistemas hidropónicos según el clima local?
 4. Principios de geometría fractal en la naturaleza.
- II. Formarán equipos de trabajo para la recolección de materiales reciclados: botellas PET, tubos PVC, mangueras, bombas de pecera, cinta y sellador.
- III. Con base en lo investigado realizarán en forma colectiva el diseño técnico (en dibujo o GeoGebra): realizar el plano o boceto del sistema hidropónico.

Fase 2

- I. Construirán en forma colectiva, con botellas PET o tubos PVC un mini sistema de cultivo hidropónico (NFT o de goteo). y elijan 1 o 2 cultivos según su clima local.
- II. Llevarán a cabo la germinación de las semillas y un registro fotográfico diario, que debe incluir: la medida de altura, número de hojas y tamaño de raíz. Y realizar el cálculo fractal: comparar patrones de hojas o tallos, calcular relación entre hojas nuevas y viejas, proporción de tamaños y simetría.
- III. Entrega a tu profesor la investigación con lo siguiente:
 - a) Bitácora científica ilustrada con observaciones y mediciones.
 - b) El boceto del sistema hidropónico.
 - c) El modelo fractal del crecimiento vegetal.
 - d) Una infografía que muestre la importancia de los cultivos hidropónicos en el mundo.

Figura 1.3

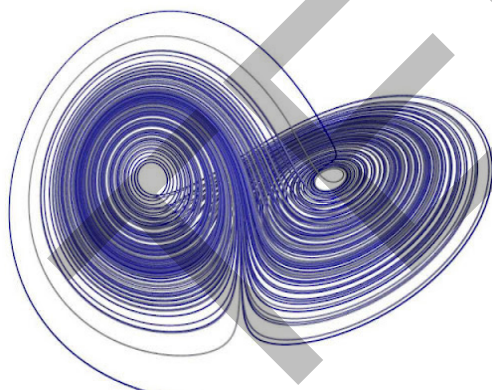
Poza "La Junta" en Zozocolco de Hidalgo, Ver. Ejemplo de Bioma Cálido.



Nota. Elaboración propia.

Figura 1.4

Sistemas dinámicos.



Nota: Adaptado de "Sistemas Dinámicos," por Instituto de Matemática y Ciencias Afines, 2022 (<http://imca.edu.pe/es/area-de-investigacion/sistemas-dinamicos>). Obra de Dominio Público.

Sistemas dinámicos discretos

Empecemos recordando que un sistema es un conjunto de partes o elementos interrelacionados que funcionan de manera coordinada para cumplir un objetivo común, donde el todo es más que la suma de sus partes; pero el cambio en un componente puede afectar a todo el conjunto. Un claro ejemplo de sistema es un ecosistema, el cual estudiaste en la Unidad de Aprendizaje Curricular de Ecosistemas: interacciones, energía y dinámica, así como los biomas y la importancia de las redes tróficas, por ejemplo, en la figura 1.1 observamos un bioma e identificamos qué elementos forman parte ese sistema.

El término dinámico, se refiere a movimiento, transformación y cambio a lo largo del tiempo. Entonces, un **sistema dinámico** es aquel en el que sus componentes se transforman para producir cambios conforme transcurre el tiempo. La forma en la cual los elementos o variables del sistema cambian con el tiempo se denomina **comportamiento del sistema**. Por ejemplo, el flujo de un líquido, el crecimiento de cierta población, los cambios y movimientos atmosféricos o el comportamiento de una neurona.

Como ya observaste en la Figura 1.3, su comportamiento está descrito por la dinámica que se produce como consecuencia de los cambios de los factores como luz solar, temperatura, precipitación, humedad, población (nacimientos y muertes), entre otros.

También, los sistemas dinámicos pueden utilizarse para analizar cómo pequeños cambios en una parte del sistema, pueden afectar al comportamiento del sistema completo. Por ejemplo, en el ecosistema podemos analizar el impacto de la baja precipitación que generará baja afluencia, y/o el impacto que tendrá en alguna especie o población animal, si esta es eliminada afectará a una cadena alimenticia y posteriormente a una red trófica.

Al graficar el comportamiento de un sistema dinámico, obtendremos órbitas y curvas. Al estudiarlas, se puede decir que las orbitas convergen o divergen.

La rama de la matemática a la que compete el estudio de estos sistemas es la de Sistemas dinámicos, entendiendo el comportamiento y naturaleza de las órbitas, además de estudiar y comprender los conjuntos de órbitas periódicas, eventualmente periódicas, asintóticas, etcétera.

Dicho esto, se obtienen dos enfoques de estudio para sistemas dinámicos, estos se diferencian por considerar sistemas dinámicos con funciones que toman valores continuos en el caso de las ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos sin funciones que toman valores discretos en el caso de la rama de sistemas dinámicos discretos.

Ahora bien, los sistemas dinámicos discretos son modelos matemáticos que describen la evolución de un sistema en pasos de tiempo discretos, como si se tomaran “instantáneas” periódicas. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se pueden elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema.

Ejemplo

Aldo Negrelli es un famoso que acaba de firmar un contrato a percibir un salario inicial de \$35,000 y se le promete un aumento de \$1,200 después de cada uno de los 8 años siguientes. Ayúdalo a determinar su salario durante su octavo año de trabajo.

Sabemos que su salario durante los primeros años sería:

\$35,000, \$36,200, \$37,400, \$38,600,...

Ya que se suma una cantidad constante cada año. Si nosotros definimos un modelo matemático de la siguiente manera:

$$S(x) = 1200x + 35000$$

Donde x representa el número de años transcurridos, es decir que nuestro modelo matemático está en función del tiempo.

Si ahora sustituimos el número de años en la función, y puesto que, son 7 años los transcurridos después del primer año, tenemos que:

$$S(x) = 1200(7) + 35000$$

$$S(x) = 8,400 + 35000$$

$$S(x) = 43,4000$$

Así que, el sueldo que estará percibiendo Aldo Negrelli en su octavo año de trabajo sería de \$43,400. Si enumeramos todos los salarios durante el periodo de 8 años, estos serían \$35,000, \$36,200, \$37,400, \$38,600, \$39,800, \$41,000, \$42,200, \$43,400. Si él decidiera ahorrar parte ese ingreso para poner un negocio, mensualmente depositaría \$20,000 y le ofrecen un interés del 5% mensual. Aldo necesita determinar cuánto tendría al finalizar el primer mes, cuánto al segundo y al tercero.

Suponiendo que C representa el capital invertido. Al inicio del segundo mes, el monto crece de la siguiente forma $C + 0.05C$ o $1.05C$. Es decir $1.05(20000) + 20000 = 41,000$, y al siguiente mes $1.05(41000) + 20000 = 63,500$. Y así sucesivamente para cada mes. Por lo tanto, Aldo tendrá ahorrado en su tercer mes la cantidad de \$63,500.

Con ello, vemos cómo el monto crece cada mes de acuerdo con la función compuesta consigo, es decir, que el comportamiento es de un **sistema dinámico discreto**.

Formalmente, veamos cómo se comporta un sistema dinámico.

Sea $f: X \rightarrow X$ función continua en un espacio métrico x . Un sistema dinámico discreto se define como el par (X, f) donde se considera la composición de una función consigo misma.

Para $k \in \mathbb{N}$, se define la k ésima iteración de f consigo misma k veces se denotará como f^k . Es decir que:

$$\begin{aligned}f^2 &= f \circ f \\f^3 &= f \circ f \circ f \\f^{k+1} &= f^k \circ f\end{aligned}$$

Veamos, por ejemplo, podemos tomar una calculadora y elegir cualquier valor numérico inicial x_0 , aplicarle a este, la función coseno reiteradas veces y observar que ocurre, es decir, realizar las operaciones:

$$\begin{aligned}\cos(x_0) \\ \cos(\cos(x_0)) \\ \cos(\cos(\cos(x_0)))\end{aligned}$$

Observamos que este proceso converge al valor 0.739085 sin importar el valor de x_0 .

Si analizamos la gráfica de la función coseno, nos damos cuenta de que es una función **periódica**, lo cual significa que la función coseno se repite cada 2π radianes (o 360 grados). Debido a esta naturaleza cíclica, diferentes ángulos separados por múltiplos enteros de 2π tendrán exactamente el mismo valor de coseno.

Periódica

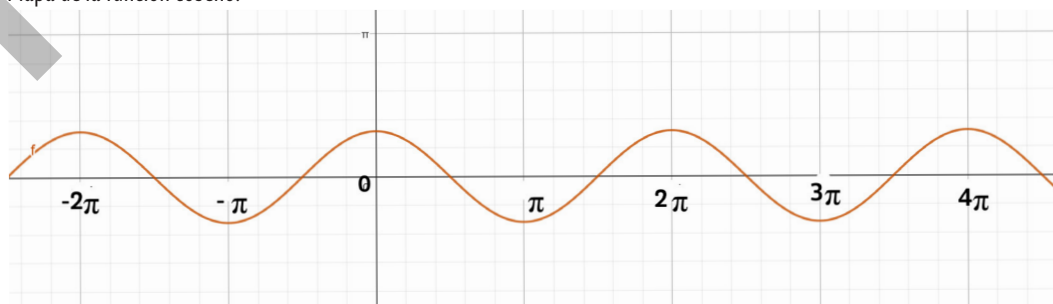
Es una función que repite sus valores a intervalos regulares.

Esto significa que existe un número positivo T (llamado período) tal que

$$f(x+T) = f(x)$$

para todo valor de x en el dominio de la función.

Figura 1.5
Mapa de la función coseno.



Nota. Elaboración propia con Geogebra.

Es importante tener en cuenta que, al graficar este tipo de comportamiento de un sistema dinámico, obtenemos órbitas y curvas, las cuales podemos identificar y analizar de forma general a través de su **mapa unidimensional**. A continuación, estudiaremos sobre las órbitas, puntos fijos y puntos periódicos, que identificamos a través de estos mapas.

Por el momento, nos interesan realizaciones unidimensionales de sistemas dinámicos en los que la variable tiempo es discreta, esto es, ecuaciones en diferencias finitas, relaciones de recursión, mapas iterados, mapas dinámicos o, simplemente, mapas. Por ejemplo $x_{n+1} = \cos x_n$ es un mapa unidimensional, pues los puntos x_n pertenecen al espacio (unidimensional) de los números reales. El caso unidimensional general es de la forma

$$x_{n+1} = f(x_n, r)$$

donde r es una constante, llamada parámetro de control, que determina el grado de no-linealidad del mapa, esto es, las propiedades de la secuencia $x_0, x_1, x_2, \dots$

Esta secuencia es la trayectoria u órbita correspondiente a la condición inicial x_0 . Los mapas surgen como modelos de fenómenos naturales en áreas tan dispares como electrónica digital, economía y sociobiología de poblaciones. Es el caso del mapa de May, que se corresponde con $f(x, r) = rx(1-x)$. Los mapas también surgen como representaciones discretas de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, para facilitar su estudio numérico, puesto que los ordenadores digitales son más adecuados para tratar variables discretas que continuas.

Como sugiere la figura 1.6, el fenómeno puede repetirse: la separación entre las dos ramas tiende a crecer al hacerlo r , la órbita 2 se hace inestable y bifurca en una órbita estable de periodo 4, etc. para dinámica de poblaciones, $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ es un ejemplo de lo que se llama **mapa logístico**.

Órbita. Sea f un mapa unidimensional cualquiera y x_0 un punto de su dominio, entonces decimos que la órbita de x_0 en el mapa f es el conjunto de los puntos:

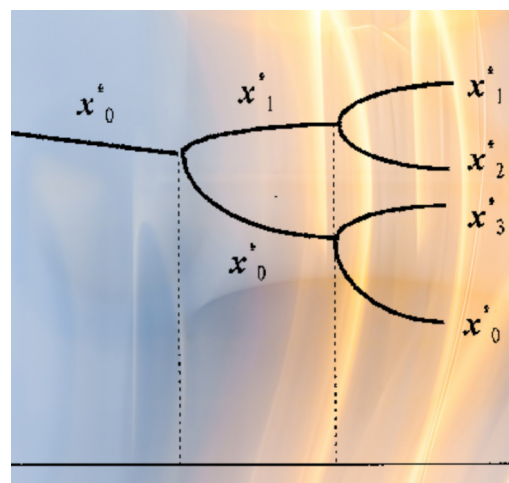
$$\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)), x_3 = f(f(f(x_0))), \dots\}$$

El punto x_0 en el que comienza la órbita se llama punto inicial, valor inicial, condición inicial o semilla de la órbita.

Mapa unidimensional

Son sistemas matemáticos que usan una sola variable para modelar su evolución en el tiempo mediante pasos discretos.

Figura 1.6
Mapa de May.



Nota. Elaboración propia con IA por Canva.

Ejemplo

Consideremos un mapa logístico con $r = 2$.

$$f(x) = 2x(1-x)$$

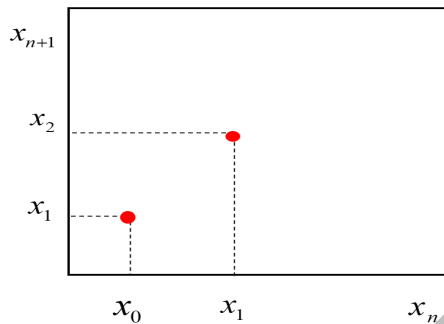
$$x_{n+1} = 2x_n(1-x_n)$$

La órbita que origina la condición inicial $x_0 = 0.01$ es:

$$\{x_0 = 0.01, x_1 = 0.0198, x_2 = 0.03881592, x_3 = 0.07451849, \dots\}$$

Figura 1.7

Representación de una órbita.



Nota. Elaboración propia por Canva.

El análisis gráfico de una órbita correspondiente a una condición inicial se puede representar como una serie temporal o en el espacio de fases.

Espacio de fases. Es el espacio formado por las variables o por las coordenadas del sistema. El mapa de retorno, en este caso se representa x_{n+1} frente a x_n es decir, frente al valor de la variable en la iteración anterior. Como podemos observar en la figura 1.9.

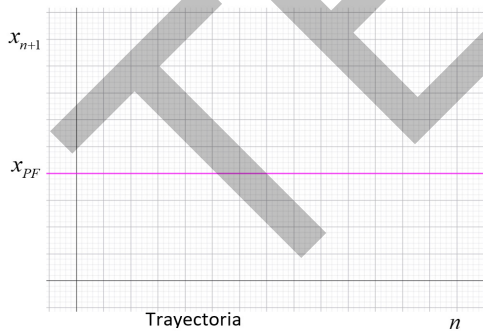
Punto Fijo. Se dice que un punto x_{PF} es un punto fijo del mapa unidimensional $x_{n+1} = f(x_n)$, se verifica:

$$f(x_{PF}) = x_{PF}$$

Al aplicar al mapa el punto fijo x_{PF} las sucesivas iteraciones siempre conducen al mismo punto.

Figura 1.8

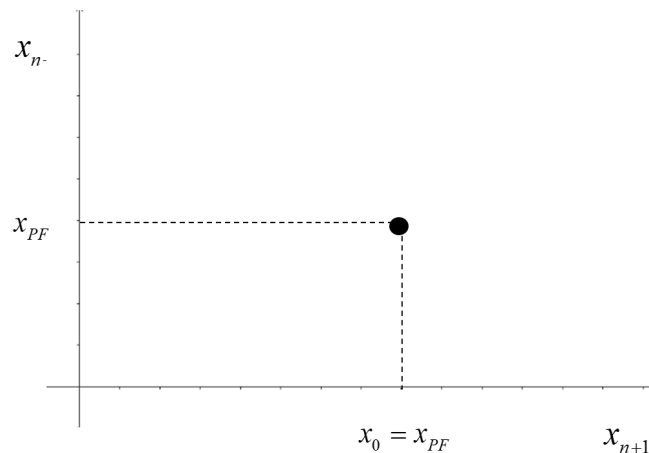
Trayectoria.



Nota. Elaboración propia por Canva.

Figura 1.9

Espacio de fases.



Nota. Elaboración propia por Canva.

Ejemplos

1. Ecuación logística en función del parámetro r

$$f(x) = rx(1-x)$$

$$f(x_{PF}) = x_{PF} \Rightarrow x_{PF} = rx_{PF}(1-x_{PF})$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$x_{PF1} = 0$$

$$1 = r - rx_{PF2} \Rightarrow x_{PF2} = 1 - \frac{1}{r}$$

Por lo tanto, el sistema dinámico $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ tiene dos puntos fijos. Si $r = 2$.

$$x_{PF1} = 0, \quad x_{PF2} = \frac{1}{2}$$

2. Tenemos la siguiente ecuación:

$$x_{n+1} = \frac{6x_n - x_n^3}{2}$$

Los puntos fijos de este sistema verifican:

$$x_{PF} = \frac{6x_{PF} - x_{PF}^3}{2}$$

Cuyas soluciones son:

$$2x_{PF} = 6x_{PF} - x_{PF}^3$$

$$x_{PF}^3 = 6x_{PF} - 2x_{PF}$$

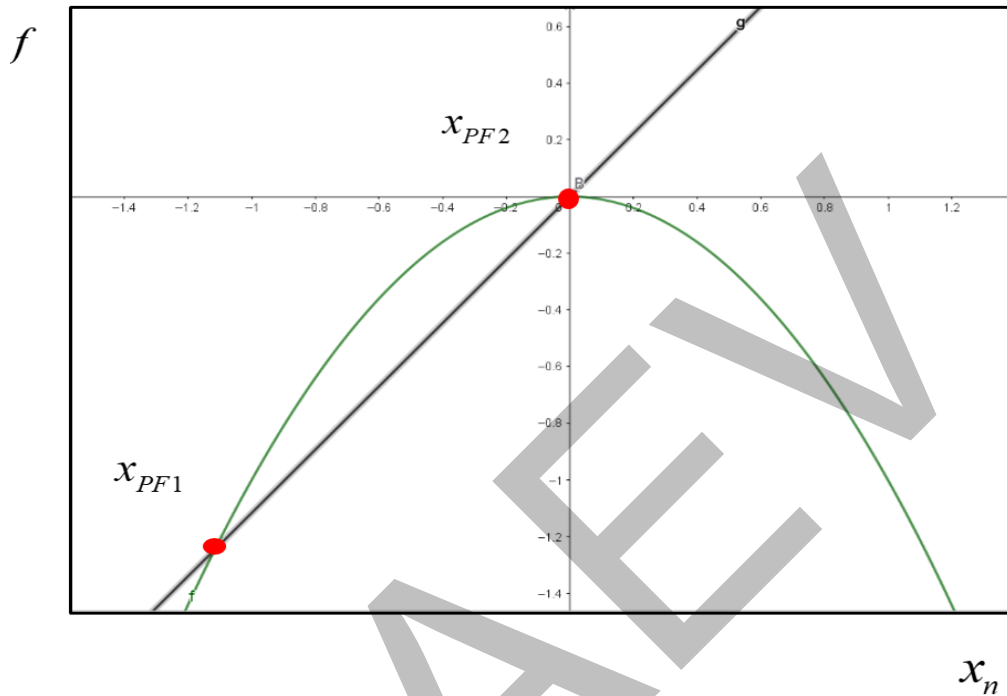
$$x_{PF}^3 = 4x_{PF}$$

$$\Rightarrow x_{PF1} = 0, \quad x_{PF2} = +2, \quad x_{PF3} = -2$$

Los puntos fijos de un mapa también se pueden obtener gráficamente representando f frente a x junto con la diagonal principal $f(x) = x$. Puesto que los puntos fijos verifican que $f(x_{PF}) = x_{PF}$, estos puntos corresponden a la intersección de la curva f con la diagonal.

Figura 1.10

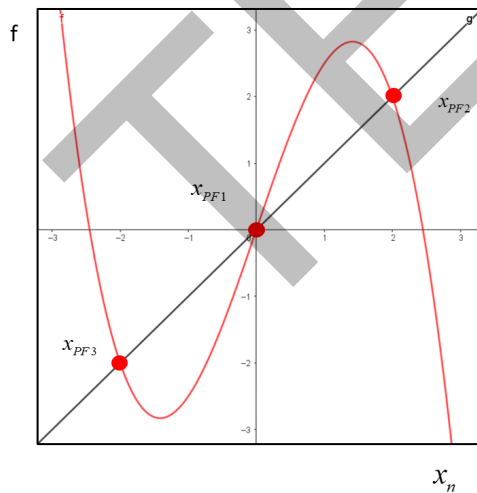
Resolución gráfica de $f(x_n) = 2x_n(1 - x_n)$



Nota. Elaboración propia.

Figura 1.11

Resolución gráfica de $x_{n+1} = \frac{6x_n - x_n^3}{2}$



Punto Periódico. Se dice que un punto x_{pp} es un punto periódico de orden P (mayor que uno) del mapa unidimensional f cuando verifica:

$$x_{pp} = f^P(x_{pp}) \quad P > 1$$

Lo que significa que el mapa después de ser llenado o aplicado P veces vuelve al valor inicial x_{pp} siendo P el número entero positivo más pequeño que verifica esta condición.

$$P = 2 \quad f^2(x_{pp}) = f(f(x_{pp}))$$

$$P = 3 \quad f^3(x_{pp}) = f(f(f(x_{pp})))$$

$$P = 4 \quad f^4(x_{pp}) = f(f(f(f(x_{pp}))))$$

Nota. Elaboración propia.

Toma en cuenta que...

f^P no se obtiene elevando a la P ésima potencia la ecuación matemática del mapa f sino de aplicar el mapa f , P veces.

Veamos:

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f^2(x) = 2[2x + 1] + 1 = 4x + 3$$

$$f^3(x) = 2[4x + 3] + 1 = 8x + 7$$

La órbita generada a partir de un valor inicial igual a un punto periódico de periodo P está formada por una sucesión de puntos que se repiten cada P valores.

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{P-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{P-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

La representación correspondiente en el espacio de fases, x_{n+1} frente a x_n , consiste en P puntos visitados, y se denomina órbita periódica de periodo P . Observa la figura 1.13. Así, se define el periodo de una órbita como el mínimo número de iteraciones requeridas para que la órbita vuelva al punto de partida.

Teniendo en cuenta la ecuación que define los puntos periódicos es:

$$x_{PP} = f^P(x_{PP})$$

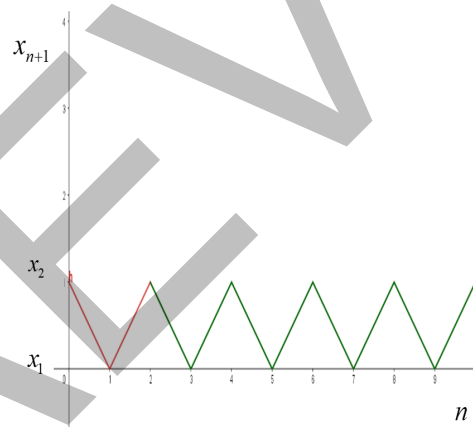
Se puede decir que los puntos periódicos son puntos fijos del mapa $g = f^P$.

$$x_{PP} = g(x_{PP}) = f^P(x_{PP})$$

Con lo que gráficamente también se pueden obtener con la intersección de la curva g con la recta: $g(x) = x$. Veamos la figura 1.14.

Figura 1.12

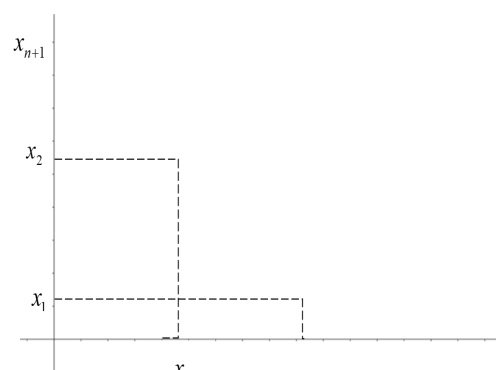
Gráfica de punto periódico de orden $P = 2$



Nota. Elaboración propia.

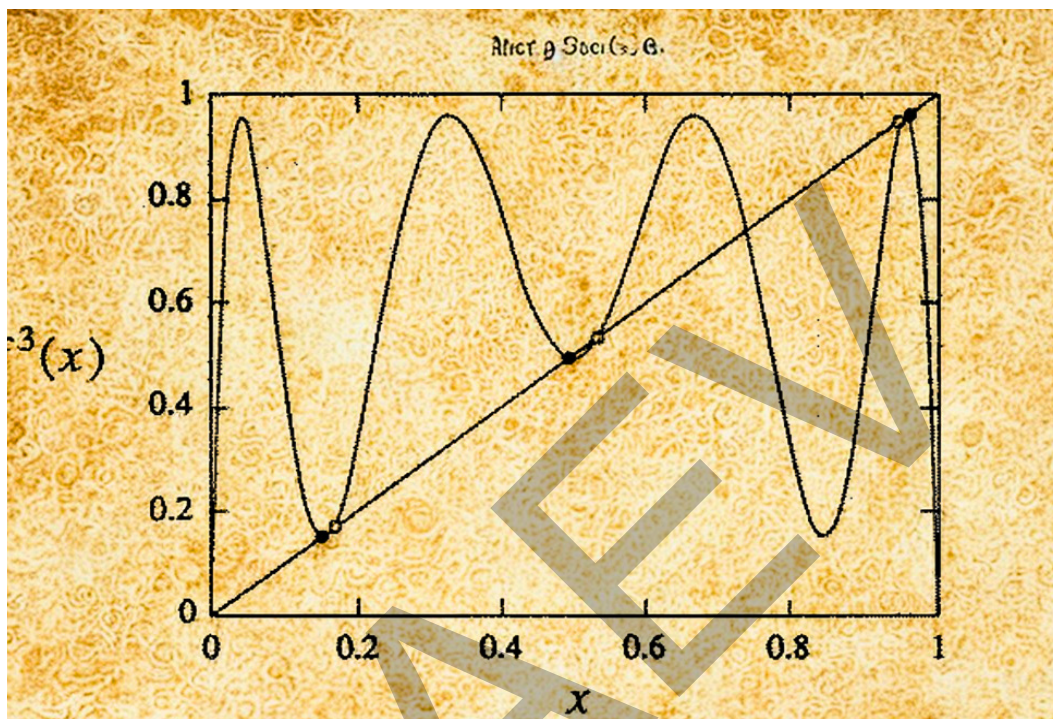
Figura 1.13

Espacio de fases de punto periódico de orden $P = 2$



Nota. Elaboración propia.

Figura 1.14
Mapa triplemente iterado.



Nota. Elaboración propia por Canva.

“La tienda”

Otro ejemplo de sistema dinámico interesante es el de “La Tienda” o “Tienda de campaña” (nombre que obtiene por la forma natral de su gráfica). Sea $I = [0,1]$, $I \subset \mathbb{R}$, $T: I \rightarrow I$, con la siguiente regla de correspondencia:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , Si \quad x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x & , Si \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Considerando

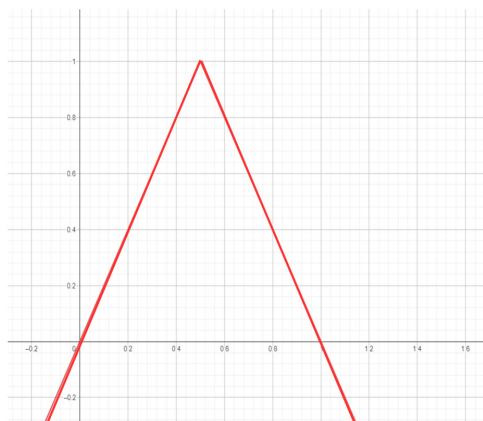
I representa el intervalo $[0,1]$

Todas las funciones tienen el mismo conjunto como Dominio y Contradominio.
Todas las funciones serán continuas.

Dado un conjunto X y una función $f: X \rightarrow X$, f^0 representa la función identidad en X , es decir, $f^0(x) = x$ para toda $x \in X$, y además $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, f compuesta consigo misma n veces.

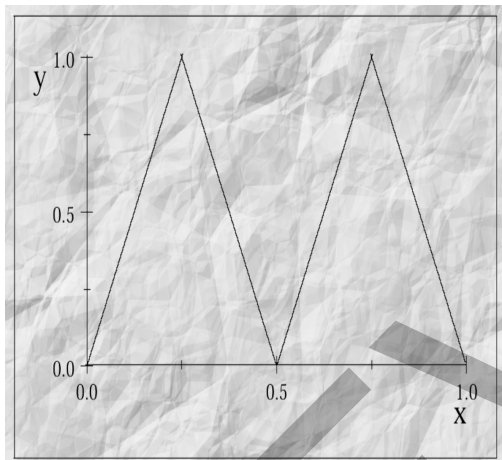
Así que $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ siempre representará a la función Tienda. Las gráficas de T^1 , T^2 y T^3 , son las siguientes:

Figura 1.15
Gráfica T.



Nota. Elaboración propia.

Figura 1.16
Gráfica T^2



Nota. Elaboración propia por IA de Canva.

Autosimilitud

Es una característica fundamental de los fractales, donde se observa cómo la misma forma se repite infinitamente en partes cada vez más pequeñas. Se manifiesta tanto en matemáticas (como en el Triángulo de Sierpinski) como en la naturaleza (como en las ramas de los árboles o las costas marítimas).

Podemos observar sus órbitas y sus periodos, y con ello la **autosimilitud** que existe. Y algunas propiedades como:

T es continua en $[0,1]$

T es derivable en x , para toda $x \in [0,1]$, $x \neq \frac{1}{2}$ y $|T'(x)| = 2$

Estudiando las características dinámicas de los puntos de T
Sea $f: I \rightarrow I$, sea x_0 , un elemento de I , la órbita de x_0 bajo f es el siguiente conjunto:

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\} = \{f^n(x_0) | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

y se denotará por $o(x_0, f)$.

Sea x_0 , un punto en el intervalo $I = [0,1]$. Se denotarán los puntos de la órbita de x_0 , de la siguiente manera

$$x_n = f^n(x_0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

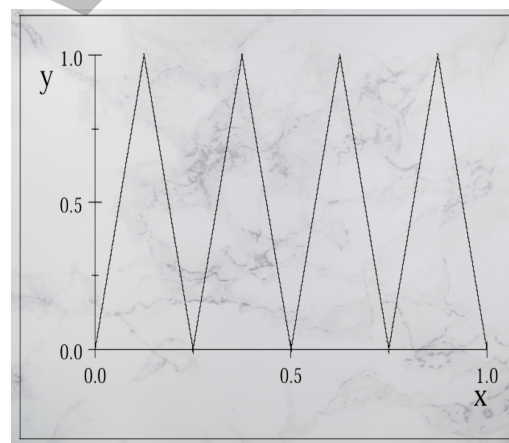
Sea $x_0 \in I$, x_0 es un punto fijo si $f(x_0) = x_0$.

En este caso $o(x_0, f) = \{x_0\}$.

Sea $x_0 \in I$, x_0 es un punto periódico de periodo n si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que

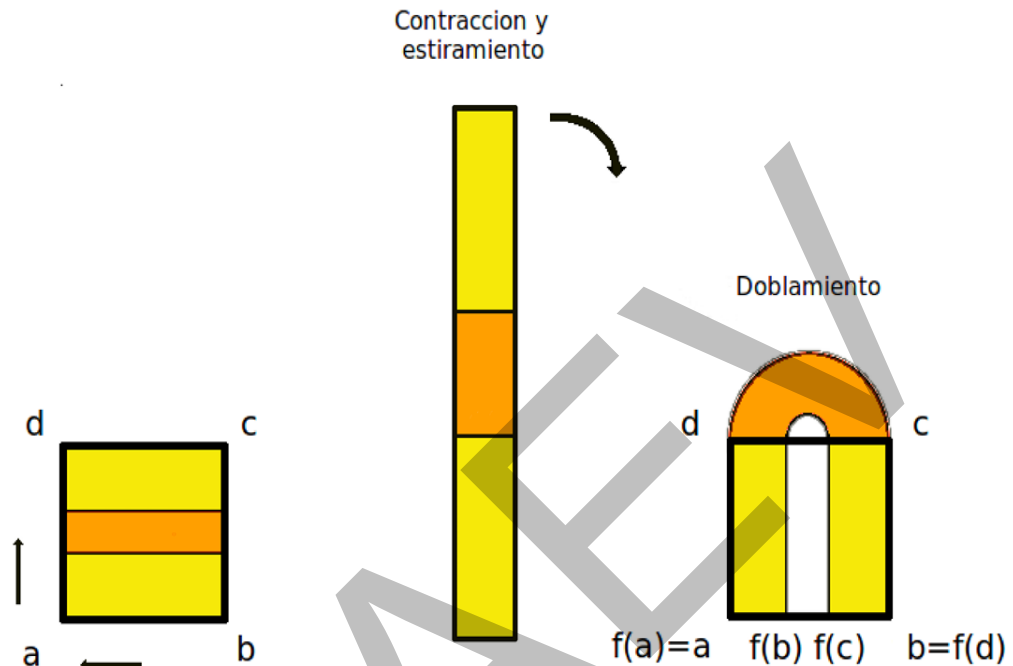
$$f^n(x_0) = x_0$$

Figura 1.17
Gráfica T^3



Nota. Elaboración propia por IA de Canva.

Figura 1.18
Construcción de una Herradura.



Nota: Adaptado de Herraduras de Smale, de Francisco González Montoya, Áreas atrapadas en Herraduras de Smale incompletas bidimensionales. LFDA.

Herradura de Smale

¿Sabías que...?

Katherine Johnson, matemática afroamericana de la NASA, calculó a mano las trayectorias orbitales de las misiones Mercury y Apolo, en una época donde las mujeres no podían ocupar cargos directivos. Su labor transformó la inclusión en la ciencia espacial.

Género

Otro ejemplo, la “herradura de Smale”, es un concepto matemático introducido por el matemático Stephen Smale para ilustrar el comportamiento de los sistemas dinámicos caóticos. Este modelo se genera al tomar un cuadrado, comprimirlo verticalmente, estirarlo horizontalmente y luego doblarlo en forma de herradura, lo que revela la complejidad y la sensibilidad de estos sistemas, ya que incluso una pequeña variación en el punto de partida puede llevar a trayectorias finales muy diferentes, pero con una estructura subyacente estable y repetitiva, que se asemeja a un fractal.

La mayoría de los puntos terminan abandonando el cuadrado bajo la acción de la transformación. Se dirigen a los extremos laterales donde, mediante iteración, convergen a un punto fijo en uno de ellos. Los puntos que permanecen en el cuadrado tras repetidas iteraciones forman un conjunto fractal y pertenecen al conjunto invariante de la transformación.

La compresión, el estiramiento y el plegado del mapa de herradura son típicos de los sistemas caóticos, pero no necesarios ni suficientes.

En el mapa de herradura, la compresión y la expansión son uniformes. Se compensan entre sí, de modo que el área del cuadrado no cambia. El plegado se realiza con precisión, de manera que las órbitas que permanecen dentro del cuadrado se pueden describir fácilmente.

Para un mapa en forma de herradura:

- Hay un número infinito de órbitas periódicas;
- Existen órbitas periódicas de período arbitrariamente largo;
- El número de órbitas periódicas crece exponencialmente con el período; y
- Cerca de cualquier punto del conjunto invariante fractal hay un punto de una órbita periódica.

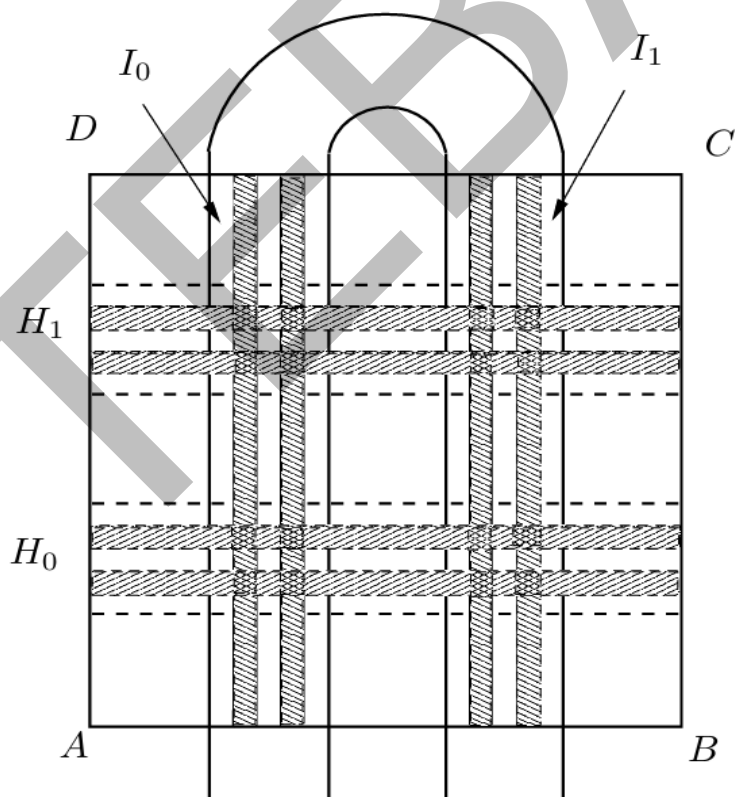
Consideremos en $\mathbb{R}^n$ el rectángulo $R = I^n$ donde I es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, con lo cual, los argumentos se harán para $n = 2$ por comodidad, y supondremos $I = [0, 5]$.

Si $H_0 = I \times [1, 2]$ y $H_1 = I \times [3, 4]$ podemos encontrar fácilmente un **difeomorfismo** f del plano, de forma que, $f(H_0) = I_0 = [1, 2] \times I$ y $f(H_1) = I_1 = [3, 4] \times I$ y que la imagen del resto del cuadrado quede fuera del mismo (ver la figura 1.15). Más aún, podemos suponer que f en esas franjas horizontales (H_0, H_1) es afín, es decir, una transformación lineal compuesta con una traslación. Podemos suponer que aplicamos la transformación lineal $A(x, y) = (x/5, 5y)$ al cuadrado y lo obtenido lo “torcemos” obteniendo lo que se muestra en la figura 1.19

Difeomorfismo
Es un isomorfismo en la categoría de las variedades diferenciables (es decir, un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable).

Isomorfismo
Es un tipo de transformación que te dice que dos objetos tienen la misma estructura.

Figura 1.19
Herradura.



Nota: Adaptado de Herradura, de Rafael Potrie, Herradura de Smale, 2007. LFDA.

En $\mathbb{R}^n$ podríamos hacer una construcción análoga eligiendo algunas direcciones para contraer y otras para expandir y luego “torciendo” y obteniendo que $f(R) \cap R$ tenga al menos dos componentes conexas.

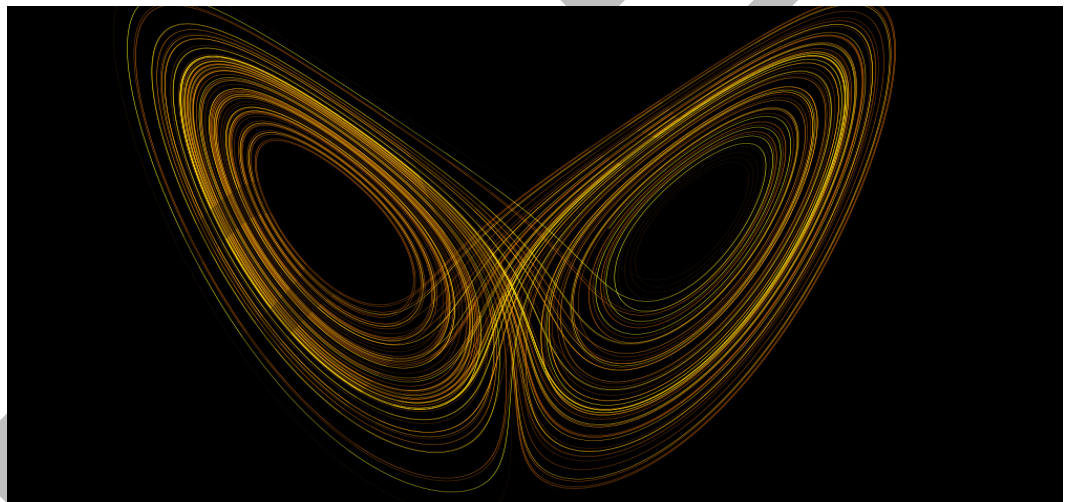
Hasta ahora, obtuvimos lo siguiente

$$R \cap f(R) = I_0 \cup I_1 = f(R \cap H_0) \cup (R \cap H_1)$$

Que son dos franjas verticales. Al intersectarlas, con H_0 y H_1 obtendremos cuatro rectángulos que al iterar al futuro se transformarán en cuatro franjas verticales de ancho $\frac{1}{5}$.

$$R \cap f(R) \cap f^2(R) = f(f(R) \cap H_0) \cup f(f(R) \cap H_1)$$

Figura 1.20
Atractor de Lorenz



Nota: Adaptada de Atractor de Lorenz, de Wikimol, Dschwen - Trabajo propio, basado en: images Lorenz system r28 s10 b2-6666.png de Wikimol and Lorenz attractor.svg de Dschwen, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=495592>

Atractor de Lorenz (teoría del caos)

¿Puede el aleteo de una mariposa en Brasil provocar un tornado en Texas?

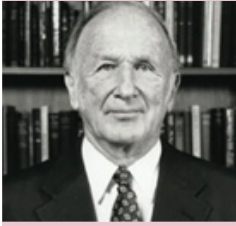
El atractor de Lorenz es un concepto introducido por Edward Lorenz en 1963. Se trata de un sistema dinámico determinista tridimensional no lineal derivado de las ecuaciones simplificadas de rollos de convección que se producen en las ecuaciones dinámicas de la atmósfera terrestre.

Para ciertos valores de los parámetros a , b , c , el sistema exhibe un comportamiento caótico y muestra lo que actualmente se llama un atractor extraño; esto fue probado por Warwick Tucker en 2002. El atractor extraño en este caso es un fractal de dimensión de Hausdorff entre 2 y 3. Grassberger (1983) ha estimado la dimensión de Hausdorff en 2.06 ± 0.01 y la dimensión de correlación en 2.05 ± 0.01 .

Conoce a...

Figura 1.20

Edward Lorenz



(1917 - 2008)

Ed Lorenz, uno de los fundadores de la teoría del caos, también desarrolló ideas revolucionarias sobre la energética de fluidos estratificados en rotación e hizo importantes contribuciones a la comprensión de la dinámica atmosférica y la predicción meteorológica. Formó parte del profesorado del MIT desde 1955 hasta su jubilación en 1988. Gracias a sus profundas contribuciones a la ciencia, así como a su carácter tranquilo, su amable humildad y su amor por la naturaleza, constituyó un ejemplo inspirador de lo que significa ser un caballero y un erudito.

Fuente: <https://www.lorenz.mit.edu/edward-n-lorenz>

Cabe mencionar que la teoría del caos es una rama de las matemáticas, la física y otras ciencias que trata ciertos tipos de sistemas dinámicos que, como ya viste al inicio de este módulo, son aquellos sistemas cuyo estado evoluciona con el tiempo, con la particularidad de ser muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Donde pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro, haciendo complicada la predicción a largo plazo.

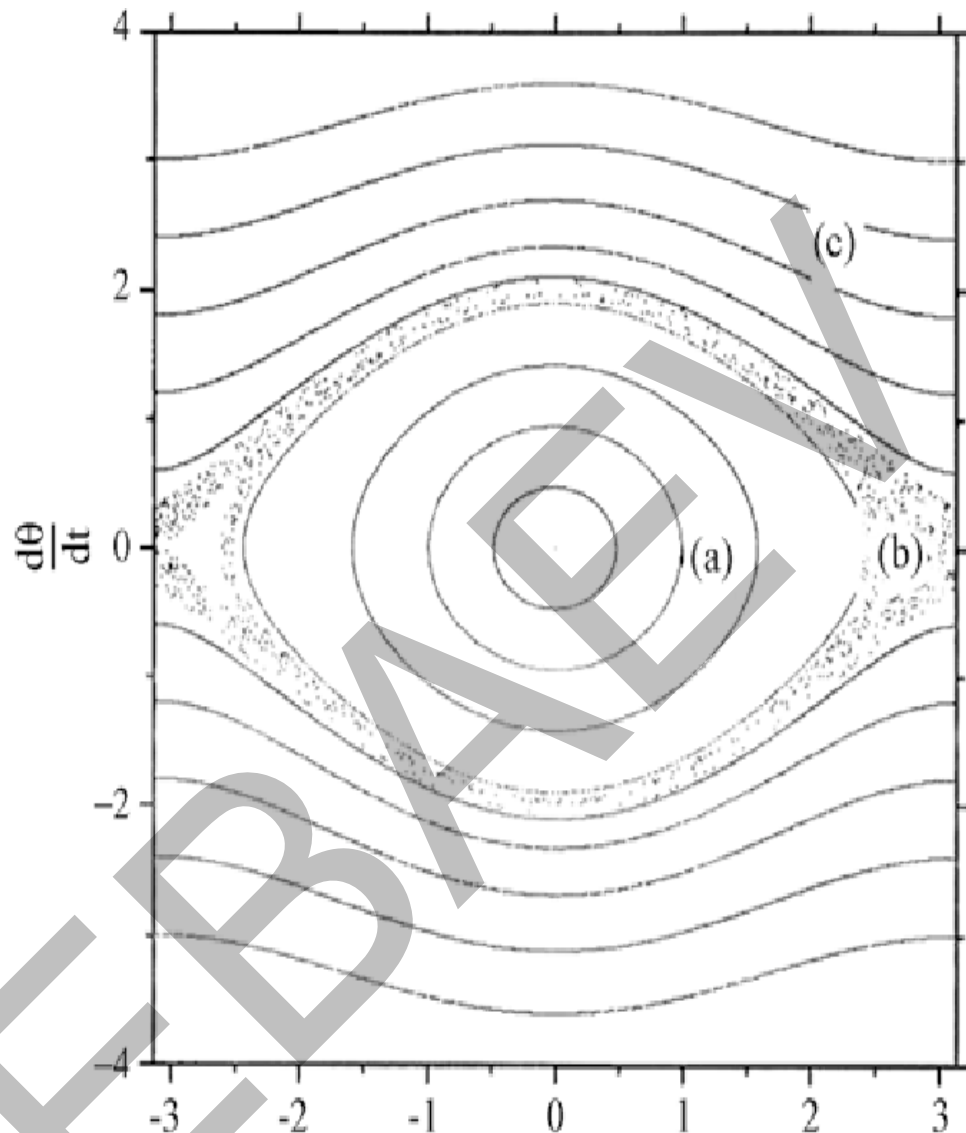
El comportamiento caótico existe en muchos sistemas naturales, incluyendo el flujo de fluidos, las irregularidades del ritmo cardíaco, el clima y el tiempo. También ocurre espontáneamente en algunos sistemas con componentes artificiales, como el tráfico vehicular. Este comportamiento puede estudiarse mediante el análisis de un modelo matemático caótico o mediante técnicas analíticas como los diagramas de recurrencia y los mapas de Poincaré.

Los físicos suelen usar el modelo atmosférico de Lorenz como un modelo de juguete: aunque no tiene mucho que ver con la realidad por ser demasiado simplificado, Lorenz se dio cuenta pronto de que era muy interesante. Si consideramos dos atmósferas prácticamente idénticas (es decir, dos puntos extremadamente próximos en el modelo de Lorenz), veremos rápidamente como sus respectivas evoluciones se separan de manera significativa convirtiéndose en atmósferas completamente diferentes. Lorenz observó la dependencia sensible de las condiciones iniciales en su modelo: el caos. Pero lo que es muy interesante es que, partiendo de un gran número de atmósferas virtuales, incluso si siguen trayectorias que parezcan un poco alocadas e imprevisibles, vemos como al incidir con un objeto fijo todas ellas se acumulan sobre una forma parecida a la de una mariposa: un extraño atractor.

Toma en cuenta que...

Un fenómeno caótico es aquel que tiene comportamientos irregulares e impredecibles, es todo fenómeno real al que se le ha suprimido el puro azar, pero sigue teniendo un comportamiento aparentemente aleatorio y que está regido por leyes precisas. En cambio, un fenómeno no caótico es aquel que tiene comportamientos regulares y es predecible.

Figura 1.21
Mapa de Poincaré



Nota: Adaptada de Mapa de Poincaré, de José Pedro Rino, 2008-2025, ResearchGate GmbH. All rights reserved.

La teoría del caos tiene aplicaciones en diversas disciplinas, incluyendo la meteorología, la antropología, la sociología, la ciencia ambiental, la informática, la ingeniería, la economía, la ecología y la gestión de crisis pandémicas. La teoría formó la base para campos de estudio como los sistemas complejos, la teoría del borde del caos y los procesos de autoensamblaje.

English reading

"Build a Lorenz Attractor"

In 1963, Edward Lorenz published his famous set of coupled nonlinear first-order ordinary differential equations; they are relatively simple, but the resulting behavior is wonderfully complex. The equations are:

$$\frac{dx}{dt} = s(y - x)$$

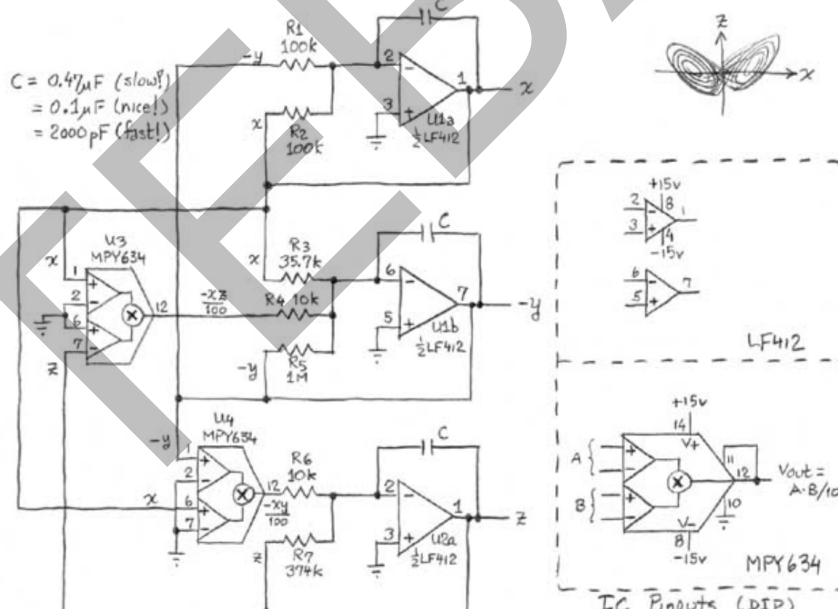
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

with suggested parameters $s=10$, $r=28$, and $b=8/3$. The solution executes a trajectory, plotted in three dimensions, that winds around and around, neither predictable nor random, occupying a region known as its attractor. With lots of computing power you can approximate the equations numerically, and many handsome plots can be found on the web. However, it's rather easy to implement these equations in an analog electronic circuit, with just 3 op-amps (each does both an integration and a sum) and two analog multipliers (to form the products xy and xz).

The Circuit

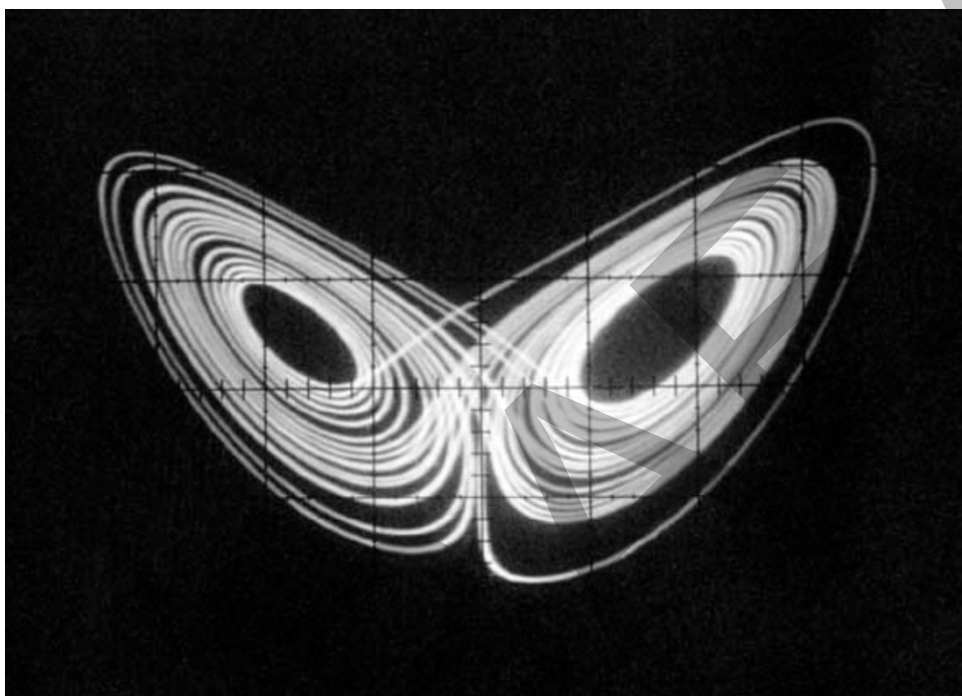
Here's the circuit:



It's not hard to understand: the op-amps are wired as integrators, with the various terms that make up each derivative summed at the inputs. The resistor values are scaled to 1 megohm, thus for example $R3$ weights the variable x with a factor of 28 ($1M/35.7k$); this is combined with $-y$ and $-xz$, each with unit weight. (Note: the equations on the diagram are normalized to 0.1V, hence the multiplier scale factor of 100.)

The Output

The circuit just sits there and produces three voltages $x(t)$, $y(t)$, and $z(t)$; if you hook x and z into a `scope, you get a pattern like this...



...the characteristic “owl’s face” of the Lorenz attractor. The curve plays out in time, sometimes appearing to hesitate as it scales the boundary and decides which basin to drop back into. The value of C , the three integrator capacitors, sets the time scale: at $0.47\mu\text{F}$ it does a leisurely wander; at $0.1\mu\text{F}$ it winds around like someone on a mission; and at $0.002\mu\text{F}$ it is fiercely busy solving its equations and delighting its audience.

Fuente:

The Art of Electronics. (http://seti.harvard.edu/unusual_stuff/misc/lorenz.htm)

¡A trabajar en tu proyecto transversal!

Ha llegado el momento de ejecutar la Fase 1 de tu proyecto, con la ayuda de tu profesor realizarás cada uno de los pasos y entregarás la evidencia de tus avances.

Como ya nos dimos cuenta, en las representaciones de los sistemas dinámicos discretos, podemos observar comportamientos fractales, es decir, que se describen **patrones** que se repiten a diferentes escalas, presentando autosimilitud (partes que se parecen al todo) y complejidad a través de la repetición de un proceso simple. Estos patrones se encuentran tanto en la naturaleza (árboles, costas, nubes) como en sistemas dinámicos.

Es por ello por lo que ahora, vamos a estudiar y comprender los conceptos de sucesiones y series, así como sus principales características.

Sucesiones

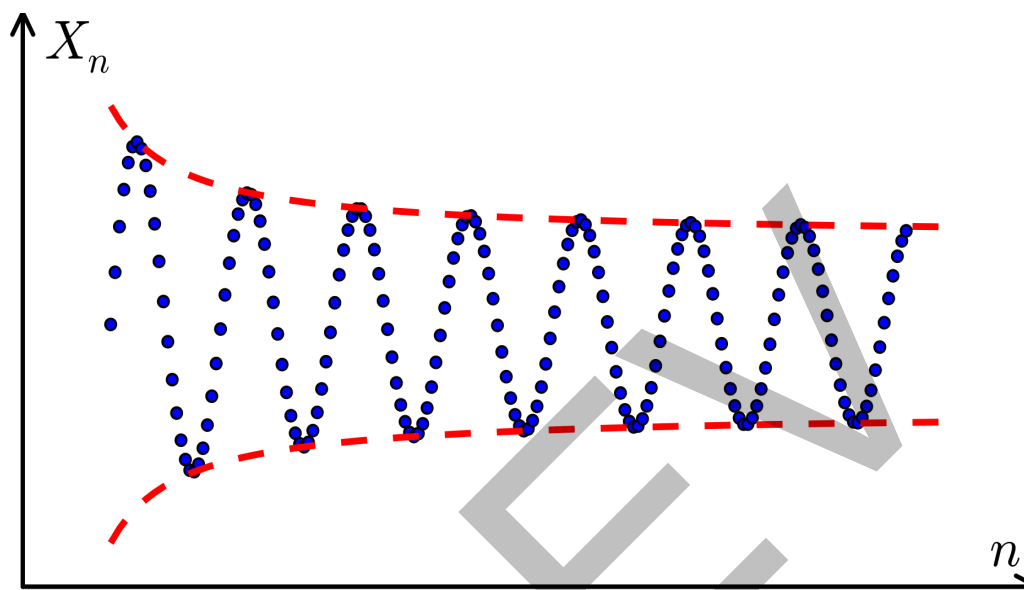
Una sucesión matemática es una lista ordenada de números, donde cada elemento se llama término y el orden es importante. Estas listas suelen seguir un patrón o regla que permite predecir los términos siguientes y que a menudo se puede expresar con una fórmula llamada término general (a_n). Las sucesiones pueden ser finitas o infinitas.

En análisis matemático y en español, una sucesión es una secuencia de números u otros objetos matemáticos relacionados entre sí, en la que se tiene en cuenta la posición relativa de cada letra respecto del anterior. Por ejemplo (3, 5, 7, 9...) es una sucesión con números impares menores que 10, y (2, 4, 8, 16...) es una sucesión con las potencias de 2. La sucesión se define matemáticamente como una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su codominio es cualquier otro conjunto, generalmente de números de diferente naturaleza, también pueden ser figuras geométricas o funciones; es decir, a cada posición de la secuencia índice 1, 2, 3, 4... se le asocia un objeto que le corresponde en el conjunto de destino. Cada uno de ellos es denominado término (también elemento o miembro) de la sucesión y al número de elementos ordenados (posiblemente infinitos) se le denomina la longitud de la sucesión.

Patrones

Son secuencias de elementos (números, formas, colores, etc.) que siguen una regla lógica de repetición. Esta regla permite predecir términos futuros en la secuencia y pueden basarse en operaciones como suma, resta, multiplicación, división o potencias. También existen patrones geométricos con regularidades visuales y patrones algebraicos que expresan relaciones entre variables y constante.

Figura 1.22
Sucesión infinita de números reales.



Nota: Adaptada de File:Cauchy_sequence_illustration2.png, de Oleg Alexandrov, Dominio público, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=13263111>

Aritméticas

Una sucesión numérica se formaliza como una aplicación de los números naturales sobre otro conjunto numérico X , de manera:

$$\begin{aligned} a : N &\rightarrow X \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Una sucesión, siendo el conjunto $X = \mathbb{N}$ puede ser, por ejemplo, la sucesión de Fibonacci. Por norma general, la sucesión numérica se formaliza como una aplicación de los números naturales en los números reales. En cualquier caso, se denota simplemente como $\{a_n\}_{n \in N}$ o, si se da por entendido que los subíndices son enteros, también se denota como $\{a_n\}_{n \geq 0}$.

En una sucesión de números tal que la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera de la sucesión, se utiliza de forma general:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ejemplos

1. Determinar el séptimo término de la sucesión $-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, \dots$

Solución:

a) Identificar la diferencia d en la sucesión dada, utilizando $a_{n-1} - a_n = d$:

$$-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, \dots$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

Tenemos que:

$$a_2 - a_1 = -\frac{5}{2} - (-3) = -\frac{5}{2} + 3 = \frac{1}{2}$$

$$a_4 - a_3 = -\frac{3}{2} - (-2) = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$d = \frac{1}{2}$$

b) Identificar los elementos anteriores en el término general:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_1 = -3$$

$$d = \frac{1}{2}$$

c) Calcular el séptimo término de la sucesión:

$$a_7 = a_1 + (7-1)\frac{1}{2}$$

$$a_7 = -3 + (7-1)\frac{1}{2}$$

$$a_7 = -3 + 6\left(\frac{1}{2}\right) = -3 + 3 = 0$$

2. Realiza las actividades que se te piden a continuación.

- a) ¿Cuánto vale la suma $1 + 2 + 3 + \dots + 28 + 29 + 30$?
- b) Si se tienen los números $1, 2, 3, \dots, n-3, n-2$, y $n-1$. ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?
- c) ¿Cuánto vale la suma S_n de los primeros n términos de la sucesión $a_n = a_1 + d(n-1)$?
- d) En la sucesión aritmética $a_n = 1 + 2n$, ¿Cuánto vale la suma de los primeros 10 términos?

Solución

- a) Si se realiza la suma

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 28 & + & 29 & + & 30 \\
 +30 & + & 29 & + & 28 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 =31 & + & 31 & + & 31 & + & \dots & + & 31 & + & 31 & + & 31
 \end{array}$$

El resultado es el mismo. En la suma $1 + 2 + 3 + \dots + 28 + 29 + 30$ hay 30 términos. Por lo que en la suma anterior se está sumando 30 veces el número 31, por lo tanto, es igual a $30(31)$. Por otra parte, en la suma se obtuvo sumando $1 + 2 + 3 + \dots + 28 + 29 + 30$ dos veces, por lo que la suma solicitada es igual a $\frac{30(31)}{2}$.

Al simplificar se obtiene $\frac{30(31)}{2} = 15(31) = 465$

Por lo tanto, $1 + 2 + 3 + \dots + 28 + 29 + 30 = 465$

- b) Si se utiliza la misma técnica que en el inciso anterior, se tendría:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-3 & + & n-2 & + & n-1 \\
 n-1 & + & n-2 & + & n-3 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 n & + & n & + & n & + & \dots & + & n & + & n & + & n
 \end{array}$$

Esta suma tiene $n-1$, por lo que vale $n(n-1)$. Pero nuevamente se ha sumado dos veces

$1 + 2 + 3 + \dots + n-3 + n-2 + n-1$, por lo que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n-3 + n-2 + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

- c) Se colocan los términos en el nuevo orden

$$\begin{array}{r}
 S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\
 S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1
 \end{array}$$

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

En este último reglón, todas las parejas tienen el mismo valor $a_1 + a_n$ porque en cada suma el primer sumando va aumentando por $+d$ y el segundo por $-d$.

Como hay n parejas se tiene $2S_n = n(a_1 + a_n)$. Por lo tanto, $S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.

Si sustituimos $a_n = a_1 + (n-1)d$, se tiene que $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d]$.

- d) Se quieren sumar 10 términos de la sucesión $a_n = 1 + 2n$, entonces se calcula el primer y décimo término.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 + 2(1) = 3 \\
 a_{10} &= 1 + 2(10) = 21
 \end{aligned}$$

Así, la suma de los primeros 10 términos es:

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}(10)(3 + 21) = 5(24) = 120$$

La notación $\sum_{i=1}^n a_i$ es una forma abreviada de escribir

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

y se lee "la sumatoria de a_i desde i igual a 1 hasta i igual a n ".

Bajo esta notación, la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$$

con d la diferencia de la sucesión.

Bucles

En programación, es una secuencia de instrucciones de código que se ejecuta repetidas veces, hasta que la condición asignada a dicho bucle deja de cumplirse.

Algunas aplicaciones más comunes son, en matemáticas financieras, las sucesiones aritméticas se utilizan para calcular pagos periódicos, amortizaciones y otros problemas relacionados con flujos de efectivo. En física, las sucesiones aritméticas se utilizan para modelar el movimiento uniforme, en el que la posición cambia en incrementos constantes con respecto al tiempo. En programación y ciencias de la computación, las sucesiones aritméticas se utilizan para generar secuencias numéricas y controlar **bucles**.

Recuerda que, en una sucesión aritmética, cada término se obtiene sumando la diferencia común al término anterior. Puedes usar la fórmula del término general y la fórmula de la suma para calcular términos individuales y sumas parciales respectivamente.

Geométricas

Una sucesión geométrica es una secuencia de números donde cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante llamada razón o factor de la progresión. Para identificarla, se divide cualquier término entre su predecesor; si el resultado es siempre el mismo, es una sucesión geométrica. La

fórmula para encontrar el término general (a_n), es $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$, donde a_1 es el primer término, r es la razón y n es la posición del término.

Ejemplo

Identifica el término general de la siguiente sucesión 2, 6, 18, 54,...

Solución

1. Identificar la razón en la sucesión dada utilizando $\frac{a_{n-1}}{a_n} = r$

2, 6, 18, 54,...

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

Tenemos que:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{54}{18} = 3$$

Así que:

$$r = 3$$

2. Considerar el término general $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$, y sustituir los elementos encontrados.

$$a_1 = 2$$

$$r = 3$$

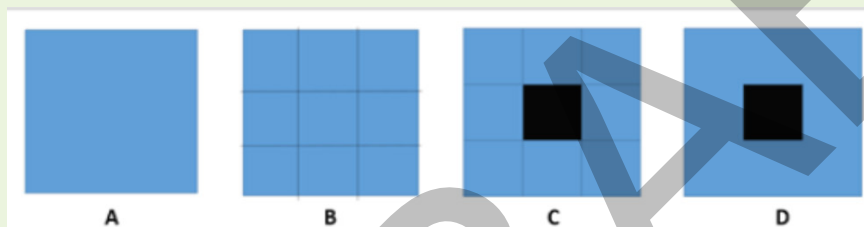
Así que:

$$a_n = 2(3^{n-1})$$

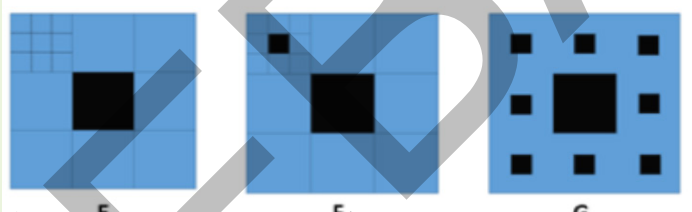
Experimento

Realiza lo que se te indica a continuación.

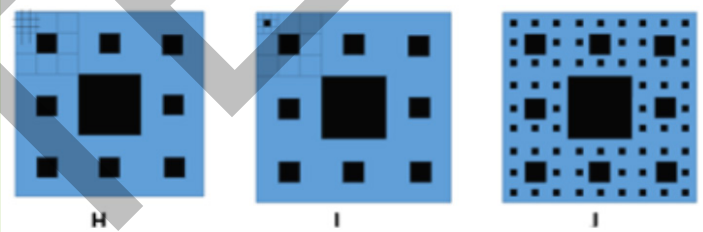
1. Se divide un cuadrado de lado 1 en 9 partes iguales y se quita el del centro.



2. De cada cuadrado que queda, se divide en 9 partes iguales y se quita el cuadrado del centro de cada uno de ellos.



3. Se realiza el mismo proceso con los cuadrados que quedan, dividiéndolos en 9 partes iguales y quitando el de en medio.



Si se sigue de ese modo, determina el valor del área del cuadrado más pequeño en el que queda dividido el cuadrado inicial, después de haber realizado el proceso n veces. A esta figura se le conoce con el nombre de Alfombra de Sierpinski. La alfombra de Sierpiński es un conjunto fractal descrito por primera vez por Waław Sierpiński en 1916. Constituye una generalización en dos dimensiones del conjunto de Cantor. Comparte con él muchas propiedades: ambos son un conjunto compacto, no numerable y de medida nula. Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es

$$\frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.8928 \dots$$

Ejemplos

1. Calcular la suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Solución:

Al enlistar los primeros n de la sucesión

$$a_1, a_2 = ra_1, a_3 = r^2 a_1, a_4 = r^3 a_1, \dots, a_{n-2} = r^{n-3} a_1, a_{n-1} = r^{n-2} a_1, a_n = r^{n-1} a_1$$

Y calcular la suma

$$a_1 + ra_1 + r^2 a_1 + r^3 a_1 + \dots + r^{n-3} a_1 + r^{n-2} a_1 + r^{n-1} a_1 =$$

$$a_1 (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) =$$

$$a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right), \text{ si } r \neq 1.$$

Si $r = 1$, entonces la suma es na_1 .

2. Calcular la suma de los primeros 5 términos de la sucesión geométrica $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Solución:

Utilizando el resultado del ejemplo anterior, como se quiere calcular la suma de los primeros 5 términos, $n = 5$, además $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{4}$; entonces la suma buscada es

$$1 \left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5 - 1}{\frac{1}{4} - 1} \right) = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{-3}{4}} =$$

Calculando la fracción compleja como $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Queda expresada de la siguiente manera $\frac{1023}{1024} \div \frac{3}{4} = \frac{341}{256}$

La suma parcial de una sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$, escrita con el símbolo de sumatoria, está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_1 r^{i-1} = \begin{cases} a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) & \text{Si } r \neq 1 \\ na_1 & \text{Si } r = 1 \end{cases}$$

Aplico lo aprendido

Realiza las actividades que se te piden a continuación.

1. Identifica si cada sucesión es una sucesión aritmética, en caso de serlo, determina su diferencia.

a) $5, 11, 17, 23, 29, 35, \dots$

b) $-3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots$

c) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \dots$

d) $11, 7, 3, -1, -5, -9, \dots$

2. Para cada caso, calcula lo que se pide

a) La suma de los primer 21 términos de la sucesión $a_n = -6 + 6n$.

b) La suma de los primer 21 términos de la sucesión $a_n = 11 - (n - 1)$.

3. Determina si las siguientes sucesiones son geométricas, y en caso de serlo, especifica su razón.

a) $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$

b) $3, -6, 12, -24, 48, -96, \dots$

c) $1, 3, 9, 27, 81, \dots$

d) $-1, -2, -4, -6, -8, -10, \dots$

4. Resuelve los siguientes planteamientos

a) Calcula la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 15(2)^{n-1}$.

b) Calcula la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 3(-2)^{n-1}$.

Fibonacci

Es una secuencia infinita de números naturales cuyos dos primeros términos son 1 y 1 y tal que, cualquier otro término se obtiene sumando los dos inmediatas anteriores. Por tanto, se cumple la relación de recurrencia siguiente:

$$r_1 = 1, r_2 = 1, r_n = r_{n-1} + r_{n-2} \quad (n > 2)$$

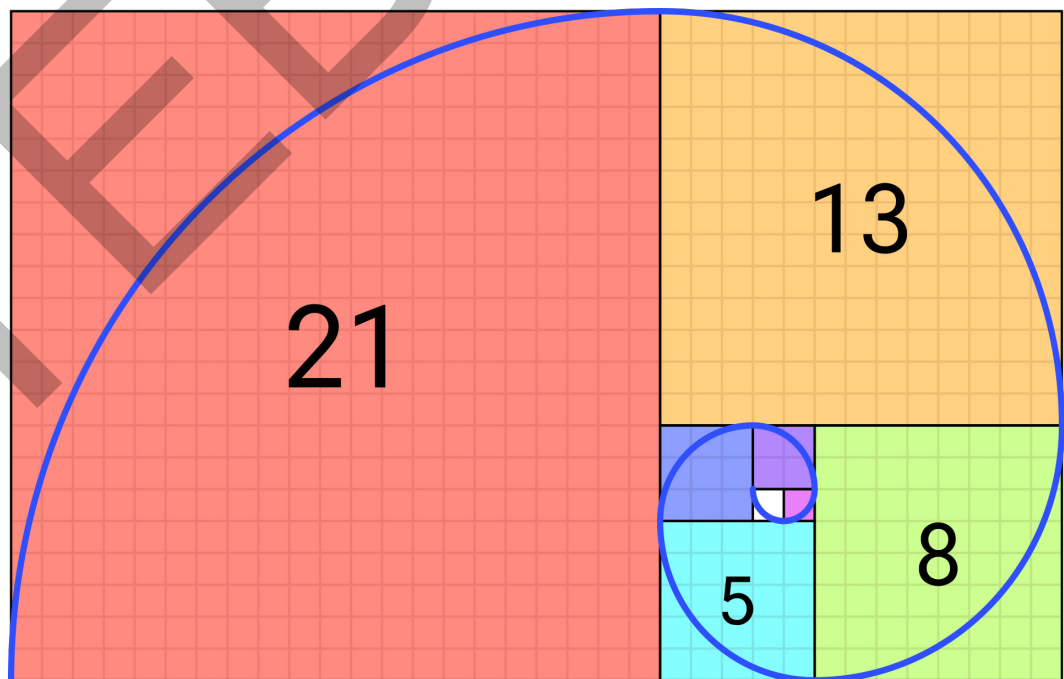
De manera explícita, tendríamos que es:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

La descubrió, en el siglo XIII, el matemático italiano Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci. Su aprendizaje se produjo gracias a los viajes que hacía junto a su padre, que era comerciante. El curioso origen de la sucesión está en la observación que hizo el mencionado matemático de cómo se propagan las parejas de conejos a partir de una pareja de cachorros. Posteriormente, se ha comprobado que numerosos fenómenos de la naturaleza están relacionados con esta sucesión.

Aparece en la estructura espiral del caparazón de algunos moluscos y en la disposición de las hojas de algunas plantas. Asimismo, se aplica también a cuestiones relacionadas con computación y teoría de juegos.

Figura 1.23
Espiral de Fibonacci.



Nota: Adaptado de Fibonacci Spiral by Romain - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=114415511>

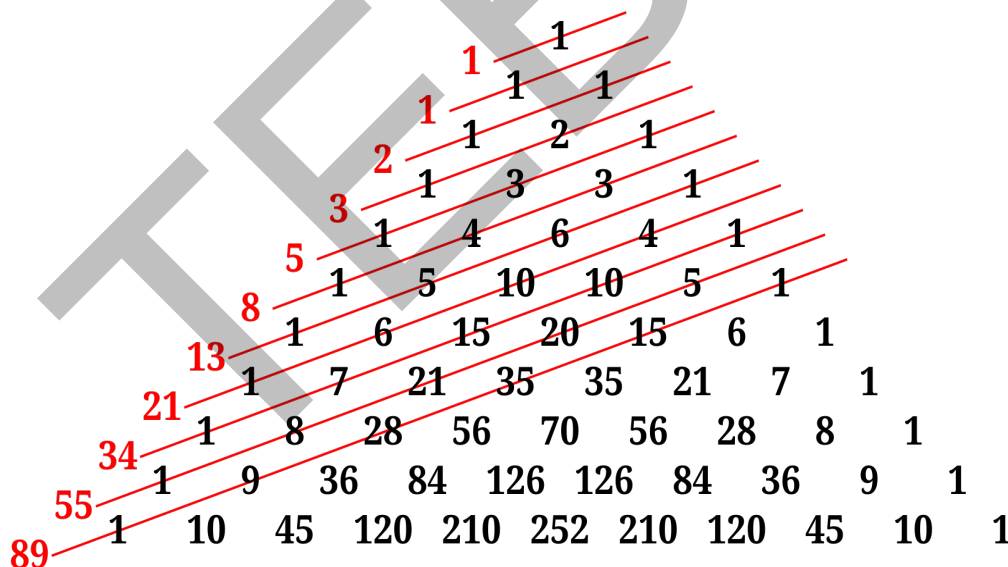
Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemática, tendencias bursátiles y teoría de juegos. También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en las flores de alcachofas y girasoles, en las inflorescencias del brécol romanesco, en la configuración de las piñas de las coníferas, en la reproducción de varias especies, en la estructura espiral del caparazón de algunos moluscos, como el nautilus, en la dinámica de los huracanes, la organización de las galaxias, proporciones del cuerpo humano, sus partes y subpartes y en cómo el ADN codifica el crecimiento de las formas orgánicas complejas.

Su propiedad más importante es que si consideramos la sucesión de cocientes de un término entre el término anterior, nos acercamos cada vez más al número áureo, esto es, a $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Esta idea viene reflejada en la fórmula siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{r_{n-1}} = \Phi$$

Los números de Fibonacci aparecen al sumar las diagonales del triángulo de Pascal. Es decir que para cualquier $n \geq 0$. Como puedes observar en la figura 1.24.

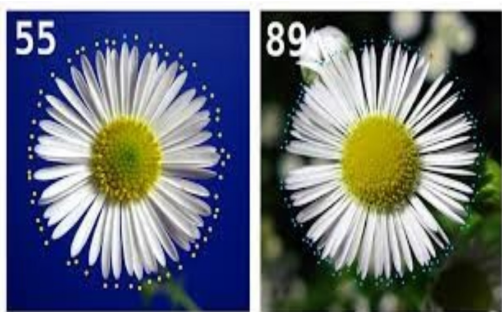
Figura 1.24
Triángulo de Pascal.



Nota: Adaptada de Fibonacci numbers as the sums of diagonals of Pascal's triangle. Por RDBury - Trabajo propio, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15045063>

Figura 1.25

Estructuras de las margaritas.



Nota: Adaptado de <https://www2.ual.es/jardinmatema/sucesion-de-fibonacci/>

Las margaritas no poseen siempre la misma cantidad de pétalos, pero su número es siempre un término de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo: 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc. En la figura 1.25 pueden verse dos casos.

En Botánica, se llama **filotaxia** a la disposición de las hojas, flores u otras estructuras vegetales repetitivas de forma regular, alrededor de un eje o centro, a menudo dispuestas según uno o varios sistemas de espirales o hélices. Las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir el máximo de luz para cada una de ellas. Por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor de un tallo de las plantas se produce siguiendo secuencias basadas exclusivamente en estos números. Las margaritas presentan las semillas en forma de 21 y 34 espirales, otros dos términos que son, además, consecutivos de esta sucesión.

Series

Aritméticas

A la suma de una sucesión aritmética se le llama **serie aritmética**, y puede ser la suma de una sucesión finita o infinita. Se representan respectivamente como:

Serie aritmética finita.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Serie aritmética infinita.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

La serie aritmética infinita está fuera del alcance de este curso, por lo que sólo te mostraré cómo calcular la suma de una progresión, es decir, de una serie aritmética finita para lo cual se tiene la siguiente fórmula:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Donde S representa la serie, n es el número de términos que se van a sumar, a_1 es el primer término de la sucesión y a_n el último.

Ejemplo

Escriba los primeros ocho términos de la sucesión, después escriba la serie que representan la suma de esa sucesión si

$$\text{a) } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{b) } a_n = (-2)^n$$

Solución:

a) Comenzamos con $n = 1$, así, los primeros ocho términos de la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ son:}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^7, \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

O bien

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$$

La serie que representa la suma de la sucesión es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

b) De nuevo comenzamos con $n = 1$; así, los primeros ocho términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = (-2)^n$ son

$$(-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, (-2)^5, (-2)^6, (-2)^7, (-2)^8$$

O

$$-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256$$

La serie que representa la suma de esta situación es

$$-2 + 4 + (-8) + 16 + (-32) + 64 + (-128) + 256 = 170$$

Cuando se conoce el término general de una sucesión, puede usarse la letra griega sigma, Σ , para escribir una serie. La suma de los primeros n términos de la sucesión cuyo n -ésimo término es a_n se representa por

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Donde i se denomina índice de la suma, n es el límite superior de la suma, y 1 es el límite inferior de la suma.

Ejemplo

Considere la sucesión $7, 9, 11, 13, \dots, 2n + 5, \dots$. La suma de los primeros cinco términos puede representarse por medio de la notación de sumatoria.

$$\sum_{i=1}^5 (2i + 5)$$

Para evaluar la serie representada, primero sustituimos en lugar de $2i + 5$ y listamos el valor. Luego sustituimos 2 por i en $2i + 5$ y listamos el valor. Seguimos este procedimiento para los valores de 1 a 5. Posteriormente sumamos estos valores para obtener el valor de la serie.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 (2i + 5) &= (2 \cdot 1 + 5) + (2 \cdot 2 + 5) + (2 \cdot 3 + 5) + (2 \cdot 4 + 5) + (2 \cdot 5 + 5) \\ &= 7 + 9 + 11 + 13 + 15 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Geométricas

Una serie geométrica es la suma de los términos de una sucesión geométrica. En una sucesión geométrica, cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo llamado razón. La suma de los primeros n términos de una serie geométrica se puede calcular con la fórmula $S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$, donde a_1 es el primer término, r es la razón y n es el número de términos.

Ejemplos

1. Determine la séptima suma parcial de una serie geométrica cuyo primer término es 16 y cuya razón común es $-\frac{1}{2}$.

Solución

Al sustituir los valores apropiados, tenemos:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_7 = \frac{16 \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^7 \right]}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = \frac{16 \left(1 + \frac{1}{128} \right)}{\frac{3}{2}} = \frac{16 \left(\frac{129}{128} \right)}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{129}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{129}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{43}{4}$$

$$S_7 = \frac{43}{4}$$

2. Determine la suma de la serie geométrica

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \frac{48}{625} + \dots$$

Solución

Utilizamos la expresión $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$ donde $|r| < 1$

Así $a_1 = 3$ y $r = -\frac{1}{5}$. Observamos que $\left| -\frac{1}{5} \right| < 1$

Sustituyendo

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1 - \left(-\frac{1}{5} \right)} = \frac{3}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Así

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \frac{48}{625} - \dots = \frac{5}{2}$$

Convergentes

Una serie es **convergente** si la sucesión de sus sumas parciales tiende a un **límite finito**. Esto significa que a medida que se suman más términos de la serie, el resultado se acerca cada vez más a un número específico y determinado. Si la suma de los términos tiende a **infinito** o no se aproxima a un valor único, la serie es **divergente**.

Por ejemplo

La serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ es **convergente** porque la suma de sus términos se acerca a 2.

Y la serie $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ es **divergente** porque la suma de sus términos tiende a infinito, en lugar de a un valor finito.

Definición formal

Las series consideradas son numéricas (con términos reales o complejos) o vectoriales (con valores en un espacio vectorial formado).

La serie de término general a_n converge cuando la sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sumas parciales converge para todo entero natural n .

$$A_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

En este caso la suma de la serie es el límite de la sucesión de sumas parciales

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$$

La naturaleza de convergencia o no-convergencia de una serie no se altera si se modifica una cantidad finita de términos de la serie.

¡A trabajar en tu proyecto transversal!

Ha llegado el momento de ejecutar la Fase 2 de tu proyecto, con la ayuda de tu profesor realizarás cada uno de los pasos y entregarás la evidencia de tus avances.

Verifica tus metas de aprendizaje

I. Responde las siguientes preguntas.

- a) ¿Qué es un sistema dinámico discreto?
- b) ¿Qué es una función periódica?
- c) ¿Qué es un comportamiento fractal?
- d) ¿Qué es una sucesión?
- e) ¿Qué es una serie?

II. Resuelve los siguientes planteamientos.

- a) Karl Friedrich Gauss (1777-1855), un famoso matemático, cuando era niño determinó mentalmente y de forma rápida la suma de los primeros 100 números naturales ($1 + 2 + 3 + \dots + 100$). Explique cómo podría haberlo hecho y determine de esa forma la suma de los primeros 100 números naturales como cree que lo pudo haber hecho Gauss. (Sugerencia: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, etcétera).
- b) Aaron Mercurio invierte, en una cuenta de ahorros, \$10,000 al 5% de interés compuesto cada año. Determine la cantidad en su cuenta y el monto de interés generado al final de 10 años.

EVALUACIÓN

Indicación: atiende las siguientes instrucciones.

1. Escribe correctamente tus datos generales.

Estudiante:		Grupo:	
Profesor:		Bloque:	
Centro:		Clave:	
Zona:		Fecha de aplicación:	

1. Determina el nivel de dominio que mostraste en la realización de las actividades propuestas. Anota el puntaje en la casilla correspondiente y obtén el total. Posteriormente, calcula la ponderación aplicando la fórmula indicada al final de la rúbrica y ubica tu nivel en este bloque.

Para evaluar sección	Indicador	Nivel de dominio				Puntaje obtenido
		Nivel I (1 puntos)	Nivel II (2 puntos)	Nivel III (3 puntos)	Nivel IV (4 punto)	
Construye tu proyecto	Investigación	Identifiqué, interprete y presente erróneamente los datos planteados y solicitados.	Identifiqué, interprete y presente	Identifiqué, interprete y presente parcialmente los datos planteados y solicitados.	Identifiqué, interprete y presente con claridad los datos planteados y solicitados.	
	Bitácora Científica	Presenté o desarrollé falazmente sobre lo solicitado en la bitácora científica.	Presenté vagamente las evidencias de fotografías de germinación, el cálculo fractal y la correlación de los datos en la bitácora científica.	Presenté parcialmente las evidencias de fotografías de germinación, el cálculo fractal y la correlación de los datos en la bitácora científica.	Presenté correctamente las evidencias de fotografías de germinación, el cálculo fractal y la correlación de los datos en la bitácora científica	
	Boceto Hidropónico	Apliqué el proceso fractal y aritmético para resolver el problema planteado de forma incorrecta.	Cometí más de 2 errores aritméticos, en la aplicación del proceso fractal para resolver el problema planteado.	Cometí uno o dos errores aritméticos, en la aplicación del proceso fractal para resolver el problema planteado.	Apliqué efectivamente procesos fractales para resolver el problema planteado.	

Para evaluar sección	Indicador	Nivel de dominio				
		Nivel I (1 puntos)	Nivel II (2 puntos)	Nivel III (3 puntos)	Nivel IV (4 punto)	Puntaje obtenido
"Verifica tus aprendizajes esperados"	Sucesiones	No entendí ni apliqué las fórmulas de sucesiones y tampoco resolví los planteamientos que involucraron el cálculo de razones en problemas reales y/o hipotéticos de mi contexto.	Entendí sin aplicar las fórmulas de sucesiones y sin resolver los	Apliqué las fórmulas de sucesiones sin resolver correctamente los	Apliqué las fórmulas de sucesiones y resolví los	
	Series.	No entendí ni apliqué las fórmulas de series y tampoco resolví los	Entendí sin aplicar las fórmulas de series y no resolví los	Apliqué las fórmulas de series sin resolver correctamente los	Apliqué las fórmulas de series y resolví los planteamientos que involucraron el cálculo de razones en problemas reales y/o hipotéticos de mi contexto, lo cual favoreció la construcción de nuevos conocimientos	
	Total					

Metacognición

1. ¿Qué fue lo que aprendí de los contenidos del módulo?
 2. ¿Para qué me sirve lo aprendido y cómo lo aplico en mi vida diaria?
 3. ¿De qué me doy cuenta en relación con lo aprendido y el desarrollo de mis habilidades de pensamiento?
 4. ¿Cómo me sentí al estudiar este tema y cuál fue mi actitud ante las actividades realizadas?
 5. ¿Qué emociones o sentimientos detonó el trabajo y las metas de aprendizajes de este módulo?
 6. ¿Qué propongo para mejorar mis aprendizajes de trayectoria?
 7. De acuerdo con lo aprendido en este módulo, ¿qué aprendizajes aplico en el contexto de mi comunidad?
-